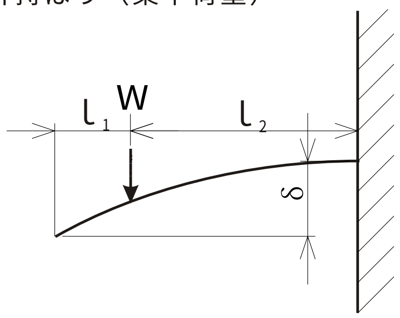
はりの強度計算

E：縦弾性係数（ヤング率）(kg/mm^2)
W：集中荷重（kg）
P：分布荷重(kg/mm)
l：はりの長さ(mm)
Z：断面係数(mm^3)
I：断面2次モーメント(mm^4)
δ：最大たわみ量(mm)
σ：最大応力(kg/mm^2)

片持ばり（集中荷重）



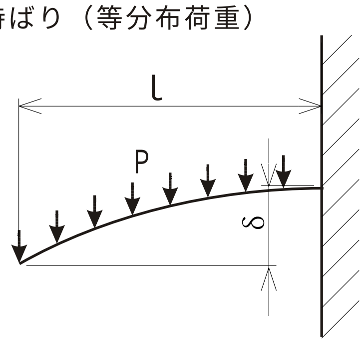
$\delta = Wl_2^2(3l_1+2l_2)/(6EI)$

$\sigma = Wl_2/Z$

$l_1=0$の時

$\delta = Wl_2^3/(6EI)$

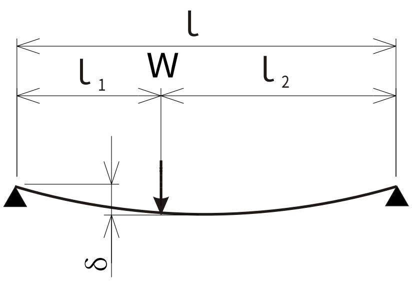
片持ばり（等分布荷重）



$\delta = Pl^4/(8EI)$

$\sigma = Pl^2/2Z$

両持ばり（集中荷重）



$\delta = Wl_2(l-l_1)_{3/2}/(9(3)^{1/2}EIl)$

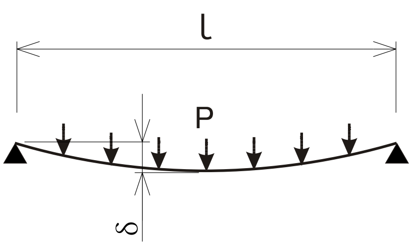
$\sigma = Wl_1l_2/Z$

$l_1=l_2$の時

$\delta = Wl^3/(48EI)$

$\sigma = Wl/(4Z)$

両持ばり（等分布荷重）



$\delta = 5Pl^4/(384EI)$

$\sigma = Pl^2/(8Z)$

タキタ技研株式会社
http://www.takitard.com/

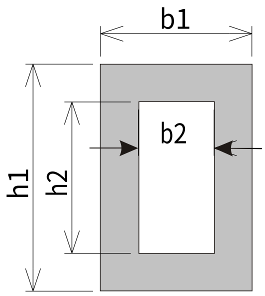
断面性能

構造設計で理想のはり設計は、荷重が加えられた時の「たわみ」が求められる十分小さな大きさになり、 その時の応力が使用する材料が疲労破壊の考慮を加味しても十分小さな値にバランス良く収める事である。 この様なはりの設計には中空材が必要不可欠で有ます。

板金を使い類似の形状を作り性能を出すことも可能ですが、2個以上の部材で作る為各部材の接合が不十分だと、十分な捩れ剛性の維持できないので注意が必要です。

A:断面積	: 高さ・幅に比例し、長さと密度を乗ずると重量となる。
Z:断面係数	: 高さの2乗に比例し曲げ応力を計算する時に使う。
I:断面2次モーメント	: 高さの3乗に比例し撓みを計算する時に使う。
Ip:極慣性モーメント	: 実半径の4乗に比例し捩れ量の計算に使う。 回転慣性力の計算にも使います。

矩形管



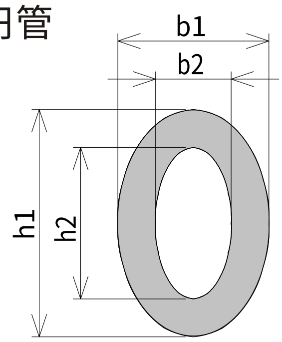
$A=b1h1-b21h2$

$Z=((b1h1^3-b2h2^3)/h1)/6$

$I=(b1h1^3-b2h2^3)/12$

$Ip=((b1h1^3+b1^3h1)-(b2h2^3+b2^3h2))/12$

円管



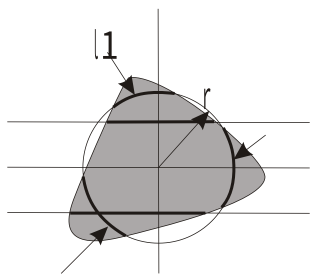
$A=\pi(b1h1-b21h2)/4$

$Z=\pi((b1h1^3-b2h2^3)/h1)/32$

$I=\pi(b1h1^3-b2h2^3)/64$

$Ip=\pi((b1h1^3+b1^3h1)-(b2h2^3+b2^3h2))/64$

一般式



$A=\int b(x)\cdot dx$

$Z=\int xb(x)\cdot dx$

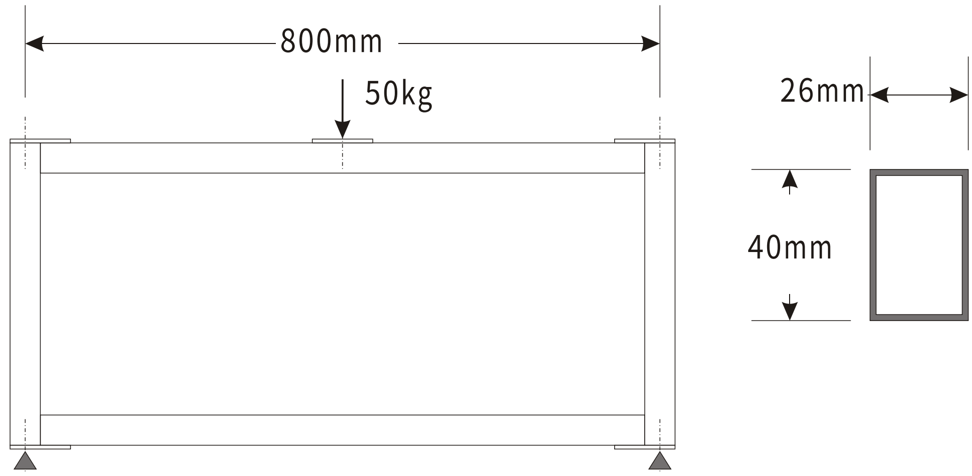
$I=\int x^2b(x)\cdot dx$

$Ip=\int r^2 l(r)\cdot dr$

タキタ技研株式会社
http://www.takitard.com/

はりの強度計算例

例．外形が40mmX26mmで板厚（t）が1.6mmの角形鋼管で出来た、
下図のような筐体について考える。



1.先ず断面性能を計算：

$Z=((b1h1^3-b2h2^3)/h1)/6$
$=((26x40^3-(26-2x1.6)(40-2x1.6)^3)/40)/6$
$=((26x40^3-22.8x36.8^3)/40)/6=(1664-1136)x10^3/40/6$
$=2199\ mm^3$

$I=(b1h1^3-b2h2^3)/12$
$=(26x40^3-(26-2x1.6)(40-2x1.6)^3)/12$
$=(26x40^3-22.8x36.8^3)/12=(1664-1136)x10^3/12$
=43978mm4

2.真直はりの強度を計算：

2.1 たわみの式：$\delta=Wl^3/(48EI)$に
W=50kg, l=800mm, E=21,000kg/mm^2, I=43,978mm^4を代入
$\delta=50 \times 800^3/(48X21{,}000 \times 43{,}978) \quad =25600x10^6/44{,}330x10^6$
たわみ：δ=0.577mm

2.2　最大応力の式：$\sigma=Wl/(4Z)$に
W=50kg, l=800mm, Z=2199mm^3を代入
$\sigma=50 \times 800/(4 \times 2199) \quad =40000/8796$
$=4.548kg/mm^2$

基礎
断面性能
計算例
Excelの例
計算原理

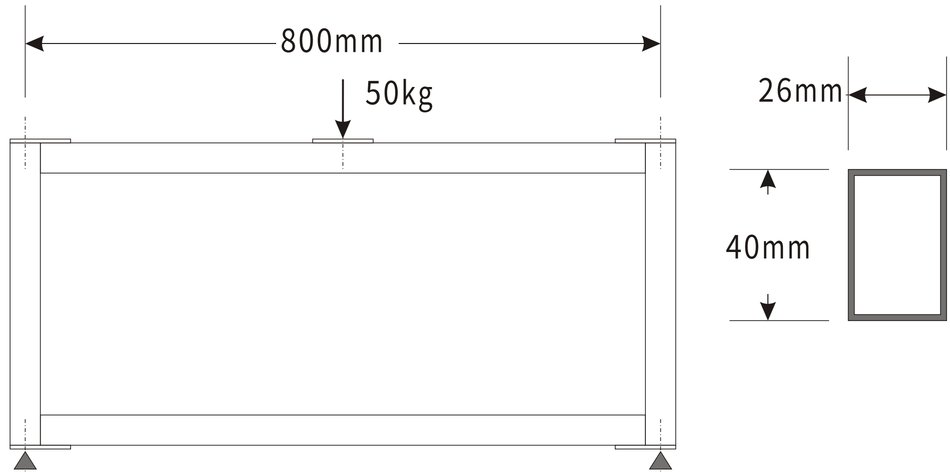
「柱」と「片持ばり]の組合せ強度

「たわみ」の計算

「柱」の傾き角は　θ= h･M ／(E･I)= h･l･W ／(E･I)　で表される。
「柱」の傾きによる「片持ばり」先端の「たわみ」は　δ　=　θ･l＝W･h･l^{2} ／(E･I)となる。

Excelを使った計算例

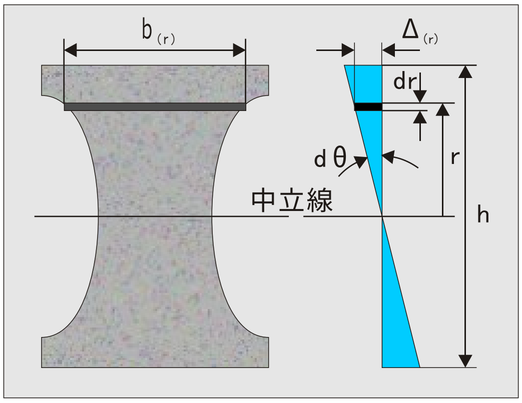
例. Excelを使い1ページ目の真直はりの強度計算をする一例を挙げます。



	A	B	C	D	
1					セル内容
2	矩形断面両持はり	記号	単位	はり	
3	縦弾性率	E	kg/mm^2	21,000	←21,000
4	比重	ρ	g/cm^3	7、78	←7、78
5	荷重	W	kg	50.0	←50.0
6	長さ	L	mm	800.0	←800.0
7	高さ（外形）	h1	mm	40	←40
8	（内抜）	h2	mm	37	←37
9	幅　（外形）	b1	mm	26	←26
10	（内抜）	b2	mm	23	←23
11	断面2次モーメント	I	mm^4	4.4E+04	←=(D9*D7^3-D10*D8^3)/12
12	断面係数	Z	mm^3	1,787	←=(D9*D7~2-D10*D8^2)/6
13	自重	Wt	kg	1.3	←=(D7*D9-D8*D10)*D6*D4/1000/1000
14					
15	たわみ	δ	mm	0.58	←=D5/2*(D6/2)^3/(3*D3*D11)
16	応力	σ	kg/mm^2	5.60	←=D5*D6/(4*D12)

はりの強度計算式の原理

（注意）： 以下の説明でははりの長さを単位長：「1」として説明します。



「断面性能」の計算

はりに曲げ応力を加えた時に「伸び」「縮」しない位置を示す中立線から半径：rの位置での「たわみ」 $\Delta_{(r)}$ を求めると、

$\Delta_{(r)} = r \cdot d\theta$　である。

この位置での微小高さ：drの応力：$\sigma_{(r)}$ は、

$\sigma_{(r)} = E \cdot \Delta_{(r)} = E \cdot r \cdot d\theta$　となり。

半径：rの位置でdrに加わる荷重：$dP_{(r)}$ は

$dP_{(r)} = \sigma_{(r)} \cdot b_{(r)} \cdot dr = E \cdot r \cdot d\theta \cdot b_{(r)} \cdot dr$ となる。

この時drにかかるモーメント：dMは、

$dM = dP_{(r)} \cdot r = E \cdot r \cdot d\theta \cdot b_{(r)} \cdot dr \cdot r = E \cdot d\theta \cdot r^2 \cdot b_{(r)} \cdot dr$

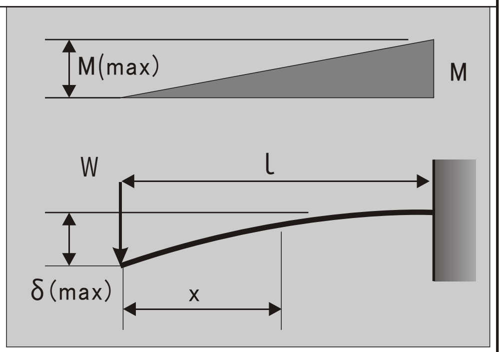
モーメントはdMを中立線から上端まで積分した値と、下端まで積分した値の和となる。

$M_{(up)} = E \cdot d\theta \cdot \int r^2 \cdot b_{(r)} \cdot dr$

この時　断面2次モーメント：$I = \int r^2 \cdot b_{(r)} \cdot dr$ であるので、

$M_{(up)} = E \cdot d\theta \cdot I$　　となり、 全体のモーメントは　　$M = M_{(up)} + M_{(up)}$　となる。

「たわみ」の計算



「はり」の傾きは　$d\theta = M_{(up)} / (E \cdot I)$　で表される。

集中荷重が「はり」端部に加えられる「片持ばり」を考えると、荷重が加えられている端部から距離xで「はり」に加わるトルク：$M_{(x)}$ は

$M_{(x)} = x \cdot W$　となる。

この時「はり」距離： x での傾き：$i_{(x)}$ は、

$$i_{(x)} = -\int d\theta \cdot dx = -\int M_{(x)} / (E \cdot I)\, dx = -W / (E \cdot I) \int x \cdot dx = -W / (2 \cdot E \cdot I)(x^2 - C_1^2)$$

この時　$x = l$ で　$i_{(x)} = 0$　であるので。　　$C_1 = l$ となり、

$$i_{(x)} = -W \cdot (x^2 - l^2) / (2 \cdot E \cdot I)$$　となる。

となり、距離：x での「たわみ」：δ

$$\delta_{(x)} = -W / (2 \cdot E \cdot I) \cdot \int (x^2 - l^2)\, dx = -W / (2 \cdot E \cdot I)(x^2/3 - l^2 \cdot x + C_2)$$

この時　$x = l$ で　$\delta(x) = 0$　であるので。　　$C_2 = (2/3) \cdot l^3$ となり

$$\delta(x) = -W / (2 \cdot E \cdot I)(x^2/3 - l^2 \cdot x + (2/3) \cdot l^3)$$

$$\delta_{(max:x=0)} = -W / (2 \cdot E \cdot I)((2/3) \cdot l^3) = -W \cdot l^3 / (3 \cdot E \cdot I)$$ となる。